Informe Metodológico

Crecimiento en tiempo discreto y continuo. Métodos para su descomposición.

FUNDACIÓN BANCO MUNICIPAL

Av. Alberdi 315

(0341) 4205600 (int. 946)

investigaciones@fundacionbmr.org.ar

Introducción

En el análisis económico muchas veces interesa observar la evolución porcentual de una determinada variable, a los fines de estudiar cómo cambia (respecto a sí misma) a lo largo del tiempo. Su utilidad radica, principalmente, en el hecho de que permite expresar los cambios en términos de porcentaje, lo cual facilita la comparación de la evolución entre distintas variables. A modo ejemplificativo, pueden mencionarse los cambios porcentuales[1] en el PIB real y en el nivel general de precios, constituyendo, respectivamente, la tasa de crecimiento y la tasa de inflación de una economía. No obstante, un estudio más detallado podría exigir ver cómo se explica una determinada variación porcentual, esto es, determinar los factores que dan origen a la misma. Dornbusch, Fischer y Startz (2004) muestran cómo puede descomponerse el cambio porcentual en el PIB[2] utilizando un razonamiento similar al de Solow (1957). De esta forma, la tasa de crecimiento de una economía se expresa mediante la suma de tres "aportes", que se corresponden, *vis à vis,* con el factor trabajo, el factor capital y el "residuo de Solow"[3].

No obstante, debe destacarse, la técnica no es privativa de la descomposición de la tasa de crecimiento del PIB, puesto que puede ser aplicada, *a priori*, a cualquier tipo de variable. Considerando lo anterior, el presente informe pretende explicar cómo puede descomponerse, *aditivamente*, la variación porcentual de distintos tipos de variables[4] utilizando distintos métodos. A tales efectos se sigue el siguiente esquema expositivo:

En la sección I se analiza el caso en que el crecimiento se da en términos discretos, esto es, entre dos momentos separados en el tiempo. Específicamente, se descompone la tasa de crecimiento de una variable generada a partir de la aplicación de las cuatro operaciones aritméticas elementales sobre otras dos variables.

En la sección II se estudia el crecimiento en tiempo continuo, lo cual implica considerar variaciones de un instante a otro. En este sentido, nuevamente, se desagrega el cambio porcentual de una variable que se define por la aplicación de operaciones aritméticas sobre otras dos. No obstante, también se realiza un análisis del caso en que dicha variable se define mediante una forma funcional desconocida.

Por último, en el apéndice se realiza una extensión de lo analizado en las secciones I y II a los casos en que intervienen n variables.

[1] En el presente informe se consideran los términos "cambio porcentual", "variación porcentual" y "tasa de crecimiento" como sinónimos.

[2] Se considera que el PIB se genera, matemáticamente, mediante una función de producción agregada de la forma $Y = A.F(K, L)$. K y L representan a los factores trabajo y capital respectivamente, mientras que A refiere al nivel de tecnología (a veces denominado, también, con el término "productividad").

[3] Refiere a aquella parte del crecimiento del PIB que no es explicada por variaciones en el capital y/o trabajo.

[4] En el presente contexto, el término "tipos de variables" refiere a la *forma aritmética* en que se generan éstas, distinguiéndose cuatro casos posibles: suma de variables, resta de variables, multiplicación de variables y división de variables. No obstante, en el apartado c) de la sección II se trata el caso "general" en que se sabe que la variable se genera mediante una determinada función, pero no se conoce la forma de la misma.

I. Crecimiento en tiempo discreto

a) Definición

Si se denota al tiempo con t (donde t indica un determinado momento en el tiempo) entonces, bajo el análisis discreto, éste asume valores $t_0, t_0+1, t_0+2, \ldots, t_0+n$ (De Gregorio, 2007). Esto quiere decir, en otros términos, que los momentos considerados se encuentran *"espaciados"* y la separación está dada por la unidad de medida del tiempo. Por lo tanto, si éste se mide en años, t_0 será el año inicial y t_0+1 (que también puede denotarse, apropiadamente, como t_1) será el año siguiente.

En base a lo expresado en el párrafo anterior considérese a la variable Z, la cual asume un determinado valor en el momento t_i y otro valor en t_j. Luego, la tasa de crecimiento de Z en tiempo discreto, entre los momentos t_i y t_j (siendo $t_i < t_j$), se define como:

$$G_Z^{ij} = \frac{Z_j - Z_i}{Z_i}$$

Donde:

G_Z^{ij} es la tasa de crecimiento de la variable Z, entre los momentos t_i y t_j.

Z_i y Z_j son los valores asumidos por la variable Z en los momentos t_i y t_j, respectivamente.

Obsérvese que si se multiplica a G_Z^{ij} por cien, ésta quedará expresada en términos porcentuales. No obstante, a los fines de simplificar la exposición, no se realizará tal operación. Por otra parte, nótese que G_Z^{ij} puede expresarse, alternativamente, como:

$$G_Z^{ij} = \frac{\Delta_Z^{ij}}{Z_i}$$

Donde:

Δ_Z^{ij} es el cambio o incremento absoluto en la variable Z, entre los momentos t_i y t_j.

Ésta última forma de expresar G_Z^{ij} permite apreciar mejor el concepto de tasa de crecimiento; en efecto, es concebida como la participación que tiene la variación absoluta de la variable bajo análisis (Δ_Z^{ij}) en el valor asumido por dicha variable en el momento de referencia[5] (Z_i). Además, tal forma de expresión será útil al momento de comparar el crecimiento en tiempo discreto con el crecimiento en tiempo continuo[6].

[5] Alude al momento respecto al cual se calcula la tasa de crecimiento (en este caso, es t_i).

[6] Es pertinente realizar una aclaración respecto al símboloΔ: usualmente se lo utiliza para denotar el cambio absoluto en una variable entre dos momentos separados en el tiempo (en otros términos, un cambio discreto). Por el contrario, se utiliza el símbolo d para denotar el cambio absoluto de una variable de un instante a otro (para más detalles véase la sección II, donde se analizará el crecimiento en tiempo continuo).

b) Tasa de crecimiento de una combinación de variables

La variable Z puede ser generada a partir de la aplicación de operaciones aritméticas a un conjunto de variables[7], distinguiéndose los siguientes casos:

1) Suma de variables

En primer lugar, considérese el caso en que la variable Z es definida como la suma de dos variables X e Y. Es decir:

$$Z_i = X_i + Y_i$$

$$Z_j = X_j + Y_j$$

Donde:

X_i y X_j refieren a los valores asumidos por la variable X en los momentos t_i y t_j, respectivamente.

Y_i e Y_j refieren a los valores asumidos por la variable Y en los momentos t_i y t_j, respectivamente.

En base a lo anterior, G_Z^{ij} quedará definida como:

$$G_Z^{ij} = \frac{(X_j + Y_j) - (X_i + Y_i)}{(X_i + Y_i)}$$

Reordenando los términos se obtiene:

$$G_Z^{ij} = \frac{(X_j - X_i) + (Y_j - Y_i)}{(X_i + Y_i)}$$

Aplicando la propiedad distributiva:

$$G_Z^{ij} = \frac{(X_j - X_i)}{(X_i + Y_i)} + \frac{(Y_j - Y_i)}{(X_i + Y_i)}$$

Multiplicando el primer sumando por $\frac{X_i}{X_i}$ y el segundo sumando por $\frac{Y_i}{Y_i}$:

$$G_Z^{ij} = \frac{(X_j - X_i)}{(X_i + Y_i)} \cdot \frac{X_i}{X_i} + \frac{(Y_j - Y_i)}{(X_i + Y_i)} \cdot \frac{Y_i}{Y_i}$$

Reordenando nuevamente los términos:

$$G_Z^{ij} = \frac{(X_j - X_i)}{X_i} \cdot \frac{X_i}{(X_i + Y_i)} + \frac{(Y_j - Y_i)}{Y_i} \cdot \frac{Y_i}{(X_i + Y_i)}$$

En base a la expresión anterior, obsérvese que $\frac{(X_j - X_i)}{X_i}$ y $\frac{(Y_j - Y_i)}{Y_i}$ son las tasas de crecimiento, entre los momentos i y j, de las variables X e Y respectivamente. Por lo tanto, en términos

[7] Es de suma importancia destacar que tales variables se suponen *independientes* entre sí.

de notación, es válido plantear que $G_X^{ij} = \frac{(X_j - X_i)}{X_i}$ y $G_Y^{ij} = \frac{(Y_j - Y_i)}{Y_i}$. Asimismo, nótese que $\frac{X_i}{(X_i + Y_i)}$ y $\frac{Y_i}{(X_i + Y_i)}$ son las participaciones que tienen, respectivamente, las variables X e Y en la variable Z, en el momento de referencia (es decir, en t_i). De esta forma, fijando $\alpha_i = \frac{X_i}{(X_i + Y_i)}$ y $\beta_i = \frac{Y_i}{(X_i + Y_i)}$, la tasa de crecimiento de Z se expresa como:

$$G_Z^{ij} = \alpha_i . G_X^{ij} + \beta_i . G_Y^{ij}$$

En base a la igualdad anterior, es legítimo afirmar que la tasa de crecimiento de Z puede escribirse como la suma ponderada de las tasas de crecimiento de X e Y, donde la variación porcentual se da, en todos los casos, entre los momentos t_i y t_j. Los ponderadores son, respectivamente, las participaciones que dichas variables tienen en Z en el momento de referencia.

2) Resta de variables

Considérese el caso en que Z es definida como la resta de dos variables X e Y:

$$Z_i = X_i - Y_i$$

$$Z_j = X_j - Y_j$$

Razonando de una forma similar a la del subapartado 1) se demuestra que:

$$G_Z^{ij} = \alpha_i . G_X^{ij} - \beta_i . G_Y^{ij}$$

Por lo tanto, la tasa de crecimiento de Z es igual a la resta ponderada de las tasas de crecimiento de X e Y, donde la variación porcentual se da, en todos los casos, entre los momentos t_i y t_j. Los ponderadores son, respectivamente, las participaciones que dichas variables tienen en Z en el momento de referencia (t_i).

3) Producto de variables

Supóngase que Z se define mediante el producto de dos variables X e Y:

$$Z_i = X_i . Y_i$$

$$Z_j = X_j . Y_j$$

Luego, la tasa de crecimiento de Z, entre los momentos t_i y t_j quedará definida mediante la siguiente expresión:

$$G_Z^{ij} = \frac{(X_j . Y_j) - (X_i . Y_i)}{(X_i . Y_i)}$$

Aplicando distributiva:

$$G_Z^{ij} = \frac{(X_j . Y_j)}{(X_i . Y_i)} - \frac{(X_i . Y_i)}{(X_i . Y_i)}$$

Reordenando y simplificando se obtiene:

$$G_Z^{ij} = \frac{X_j}{X_i} . \frac{Y_j}{Y_i} - 1$$

Dado que $G_X^{ij} = \frac{(X_j - X_i)}{X_i}$, se deduce que $\frac{X_j}{X_i} = G_X^{ij} + 1$. Aplicando el mismo razonamiento a la variable Y, se tiene que $\frac{Y_j}{Y_i} = G_Y^{ij} + 1$. Consecuentemente:

$$G_Z^{ij} = (G_X^{ij} + 1).(G_Y^{ij} + 1) - 1$$

Luego, desarrollando la expresión anterior se obtiene:

$$G_Z^{ij} = G_X^{ij} + G_Y^{ij} + G_X^{ij} . G_Y^{ij}$$

La igualdad precedente indica que la tasa de crecimiento de Z (entre t_i y t_j) puede escribirse como la adición de tres sumandos, de los cuales los dos primeros se corresponden, inequívocamente, con las tasas de crecimiento de X e Y. Obsérvese que el tercer sumando es el producto de las tasas de crecimiento de tales variables por lo que el “aporte” resultante se atribuye a un efecto “combinado” de ambas.

4) Cociente de variables

Considérese el caso en que Z se define como el cociente de dos variables X e Y:

$$Z_i = \frac{X_i}{Y_i}$$

$$Z_j = \frac{X_j}{Y_j}$$

La tasa de crecimiento de Z, entre t_i y t_j, está dada por:

$$G_Z^{ij} = \frac{\frac{X_j}{Y_j} - \frac{X_i}{Y_i}}{\frac{X_i}{Y_i}}$$

Reordenando se obtiene:

$$G_Z^{ij} = \left(\frac{X_j}{Y_j} - \frac{X_i}{Y_i}\right) . \frac{Y_i}{X_i}$$

$$G_Z^{ij} = \frac{X_j}{X_i} . \frac{Y_i}{Y_j} - 1$$

Recordando que $\frac{X_j}{X_i} = G_X^{ij} + 1$ y $\frac{Y_j}{Y_i} = G_Y^{ij} + 1$, la igualdad anterior se reexpresa como:

$$G_Z^{ij} = (G_X^{ij} + 1). \left(\frac{1}{G_Y^{ij} + 1}\right) - 1$$

Tomando a $(G_Y^{ij}+1)$ como denominador común, G_Z^{ij} puede expresarse como un único cociente:

$$G_Z^{ij} = \frac{(G_X^{ij}+1)-(G_Y^{ij}+1)}{G_Y^{ij}+1}$$

Reexpresando nuevamente:

$$G_Z^{ij} = \frac{1}{G_Y^{ij}+1}.(G_X^{ij}-G_Y^{ij})$$

Por consiguiente, la tasa de crecimiento de Z queda definida como la diferencia de las tasas de crecimiento de X e Y ponderada por el factor $\left(\frac{1}{G_Y^{ij}+1}\right)$. Nótese que si G_Y^{ij} toma valores lo suficientemente pequeños, el factor de ponderación asumirá valores razonablemente cercanos a la unidad[8], legitimando la escritura de la G_Z^{ij} como la simple diferencia de G_X^{ij} y G_Y^{ij}.

II. Crecimiento en tiempo continuo

a) Definición

El crecimiento puede, en términos teóricos, tomar lugar sobre una base continua, lo cual implica considerar cambios infinitesimales en el tiempo. En otras palabras, se asume la posibilidad de que las variaciones ocurran instante a instante (Alpha Chiang y Wainwright, 2006). Consecuentemente, el abordaje matemático del crecimiento en tiempo continuo requiere del uso del cálculo diferencial.

Teniendo en cuenta lo expresado en el párrafo anterior, considérese la variable Z como función del tiempo (t):

$$Z = Z(t)$$

Se define la derivada temporal de Z, y se la simboliza $\dot{Z}$, como la derivada de dicha variable respecto al tiempo:

$$\dot{Z} = \frac{dZ}{dt}$$

La expresión anterior indica que la derivada temporal de Z mide, *aproximadamente*[9], la variación absoluta en Z por cambio unitario en el tiempo. Nótese que, si se escoge convenientemente la unidad de medida del tiempo, de forma tal que refleje períodos lo suficientemente breves, queda legitimada la consideración de $\dot{Z}$ como una aproximación al cambio absoluto instantáneo en Z.

[8] Esta observación será útil al momento de analizar el crecimiento en tiempo continuo (sección II).

[9] Un cambio en Z (ΔZ) puede aproximarse linealmente mediante la diferenciación total de dicha variable, es decir $\Delta Z \cong \dot{Z}.dt$ (la aproximación ofrece una mejor estimación conforme dt asume valores más pequeños). Si se fija un cambio unitario en el tiempo $(dt = 1)$ se tiene que $\Delta Z \cong \dot{Z}$. Por consiguiente, la derivada temporal de Z refleja, *per se*, una aproximación al cambio absoluto en Z por variación unitaria del tiempo.

En base a lo explicado en los párrafos precedentes, se introduce el concepto de *tasa instantánea de crecimiento* para la variable Z, simbolizada por $\hat{Z}$, y definida como:

$$\hat{Z} = \frac{\dot{Z}}{Z}$$

El denominador de la expresión anterior es el valor asumido por Z en el instante inicial. Por lo tanto, y recordando la interpretación de $\dot{Z}$, se justifica la consideración de $\hat{Z}$ como una tasa de crecimiento de carácter instantáneo.

Por otra parte, reexpresando $\hat{Z}$ se obtiene:

$$\hat{Z} = \frac{1}{Z}.\frac{dZ}{dt}$$

Luego, considerando que $\frac{1}{Z} = \frac{d(\ln Z)}{dZ}$ y sustituyendo en la expresión anterior:

$$\hat{Z} = \frac{d(\ln Z)}{dt}$$

La definición alternativa de la tasa instantánea de crecimiento de Z como la derivada de su logaritmo natural respecto al tiempo será de mucha utilidad en los próximos subapartados.

b) Tasa instantánea de crecimiento de una combinación de variables

De forma similar a la sección I, en el presente apartado se analizan las distintas combinaciones de variables (vía uso de operaciones aritméticas) que pueden dar origen a la variable Z. Nuevamente, se supone que tales variables son independientes entre sí.

1) Suma de variables

Considérese el caso en que Z se define mediante la suma de dos variables X e Y, ambas dependientes del tiempo:

$$Z(t) = X(t) + Y(t)$$

Derivando ambos miembros respecto al tiempo:

$$\dot{Z} = \dot{X} + \dot{Y}$$

Dividiendo ambos miembros por Z:

$$\frac{\dot{Z}}{Z} = \frac{\dot{X}}{Z} + \frac{\dot{Y}}{Z}$$

Multiplicando y dividiendo los sumandos, respectivamente, por X e Y:

$$\frac{\dot{Z}}{Z} = \frac{\dot{X}}{X}.\frac{X}{Z} + \frac{\dot{Y}}{Y}.\frac{Y}{Z}$$

Fijando $\alpha = \frac{X}{Z}$ y $\beta = \frac{Y}{Z}$, puede reescribirse lo anterior como:

$$\hat{Z} = \alpha.\hat{X} + \beta.\hat{Y}$$

Ergo, la tasa instantánea de crecimiento de Z es la suma ponderada de las tasas instantáneas de crecimiento de X e Y, donde los ponderadores representan las respectivas participaciones que tales variables tienen sobre Z en el instante inicial. Debe resaltarse que dichos ponderadores varían de instante a instante. Por otra parte, obsérvese que si Z se define mediante la suma de dos variables, la descomposición de su tasa de crecimiento es la misma independientemente de si se trabaja en tiempo discreto o continuo.

2) Resta de variables

Supóngase que Z se define mediante la resta de dos variables X e Y, ambas funciones del tiempo:

$$Z(t) = X(t) - Y(t)$$

Mediante un procedimiento análogo al desarrollado previamente se demuestra que:

$$\hat{Z} = \alpha.\hat{X} - \beta.\hat{Y}$$

Consecuentemente, la tasa instantánea de crecimiento de Z es la resta ponderada de las tasas instantáneas de crecimiento de X e Y, siendo los ponderadores iguales a las respectivas participaciones que tales variables tienen sobre Z en el instante inicial. Asimismo, nuevamente se observa que la desagregación de la tasa de crecimiento de Z, cuando ésta se define mediante la diferencia de dos variables, es la misma independientemente de si se trabaja en tiempo discreto o continuo.

3) Producto de variables

Considérese el caso en que Z es definida mediante el producto de dos variables X e Y, ambas dependientes del tiempo:

$$Z(t) = X(t).Y(t)$$

Aplicando logaritmos naturales a ambos miembros:

$$\ln Z(t) = \ln X(t) + \ln Y(t)$$

Luego, derivando ambos miembros respecto al tiempo:

$$\frac{d(\ln Z)}{dt} = \frac{d(\ln X)}{dt} + \frac{d(\ln Y)}{dt}$$

Por lo tanto:

$$\hat{Z} = \hat{X} + \hat{Y}$$

Por consiguiente, la tasa instantánea de crecimiento de Z es la suma de las tasas instantáneas de crecimiento de X e Y. En este caso existe una diferencia respecto a lo concluido bajo el análisis en tiempo discreto, puesto que no se incluye el producto de las tasas de crecimiento de X e Y. Esto se debe a que, al considerarse cambios infinitesimales en el tiempo y en las variables, el producto $\hat{X}.\hat{Y}$ asume un valor muy pequeño, por lo que queda "eliminado" de la igualdad. Consecuentemente, la desagregación del cambio porcentual en Z como la suma de las tasas de crecimiento de X e Y sólo será válida en la medida en que $\hat{X}$ e $\hat{Y}$ asuman valores razonablemente pequeños[10].

4) Cociente de variables

Supóngase que Z se define mediante el cociente de dos variables X e Y que dependen del tiempo:

$$Z(t) = \frac{X(t)}{Y(t)}$$

Mediante un razonamiento análogo al caso anterior (aplicando logaritmos naturales a ambos miembros y luego derivando respecto al tiempo) se deduce que:

$$\hat{Z} = \hat{X} - \hat{Y}$$

Ergo, la tasa instantánea de crecimiento de Z es la resta de las tasas instantáneas de crecimiento de X e Y. Si se compara con lo obtenido bajo el análisis en tiempo discreto, se observa que "desaparece" el factor de ponderación, dado que, al trabajar con variaciones infinitamente pequeñas, tiende a la unidad. Nuevamente, debe destacarse que la descomposición del cambio porcentual en Z como la diferencia de las tasas de crecimiento de X e Y sólo será válida en la medida en que $\hat{X}$ e $\hat{Y}$ asuman valores pequeños.

c) Tasa instantánea de crecimiento de una función de dos variables

En el presente apartado se analiza la desagregación de la tasa instantánea de crecimiento de Z cuando ésta depende de X e Y (funciones, a su vez, del tiempo) a partir de una forma funcional *desconocida*[11]. Asimismo, se distinguen dos casos, según X e Y sean independientes o dependientes entre sí.

1) X e Y independientes entre sí

Se parte de la siguiente definición:

$$Z(t) = Z(X(t), Y(t))$$

Derivando ambos miembros respecto al tiempo:

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial X} . \frac{dX}{dt} + \frac{\partial Z}{\partial Y} . \frac{dY}{dt}$$

$$\dot{Z} = \frac{\partial Z}{\partial X} . \dot{X} + \frac{\partial Z}{\partial Y} . \dot{Y}$$

Dividiendo ambos miembros por Z:

---

[10] A modo ejemplificativo, puede recurrirse a la denominada "ecuación de Fisher". En efecto, la misma sostiene que la tasa de interés nominal (i) puede aproximarse mediante la suma de la tasa de interés real (r) y la tasa de inflación (π), resultando en una mejor estimación conforme r y π tienden a cero.

[11] En los distintos casos analizados en el apartado b) de la presente sección, la forma funcional que relaciona Z con X e Y es conocida, puesto que se genera a partir de la aplicación de operaciones aritméticas.

$$\hat{Z} = \frac{\partial Z}{\partial X}.\frac{1}{Z}.\dot{X} + \frac{\partial Z}{\partial Y}.\frac{1}{Z}.\dot{Y}$$

Multiplicando y dividiendo los sumandos, respectivamente, por X e Y:

$$\hat{Z} = \frac{\partial Z}{\partial X}.\frac{X}{Z}.\frac{\dot{X}}{X} + \frac{\partial Z}{\partial Y}.\frac{Y}{Z}.\frac{\dot{Y}}{Y}$$

$$\hat{Z} = \frac{\partial Z}{\partial X}.\frac{X}{Z}.\hat{X} + \frac{\partial Z}{\partial Y}.\frac{Y}{Z}.\hat{Y}$$

Nótese que $\frac{\partial Z}{\partial X}.\frac{X}{Z}$ y $\frac{\partial Z}{\partial Y}.\frac{Y}{Z}$ son las elasticidades de Z respecto a X e Y, respectivamente. Si se las simboliza mediante $e_{Z,X}$ y $e_{Z,Y}$, entonces:

$$\hat{Z} = e_{Z,X}.\hat{X} + e_{Z,Y}.\hat{Y}$$

Por ende, la tasa instantánea de crecimiento de Z es la suma ponderada de las tasas instantáneas de crecimiento de X e Y, siendo los ponderadores las respectivas elasticidades. Dado que se ha trabajado con una forma funcional desconocida, es plausible considerar que la fórmula anterior constituye una "fórmula general". Asimismo, los casos analizados en los subapartados anteriores constituyen casos particulares de la misma[12].

2) X e Y dependientes entre sí

Se parte de la siguiente igualdad:

$$Z = (X, Y(X))$$

La expresión anterior indica que Z es función de X e Y, donde ésta última también depende de X. Nótese que se ha suprimido el argumento t a los fines de simplificar la notación, no obstante, debe recordarse que todas las variables son funciones del tiempo. Luego, diferenciando totalmente la expresión:

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial X}.dX + \frac{\partial Z}{\partial Y}.dY$$

Dado que $Y = Y(X)$, su diferencial total viene dado por:

$$dY = \frac{dY}{dX}.dX$$

Sustituyendo lo anterior en el diferencial total de Z:

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial X}.dX + \frac{\partial Z}{\partial Y}.\frac{dY}{dX}.dX$$

Dividiendo ambos miembros por dt, con el objeto de obtener las derivadas temporales:

$$\dot{Z} = \frac{\partial Z}{\partial X}.\dot{X} + \frac{\partial Z}{\partial Y}.\frac{dY}{dX}.\dot{X}$$

[12] De esta forma y a modo de ejemplo, cuando $Z = X.Y$, puede demostrarse que $e_{Z,X} = e_{Z,Y} = 1$.

Dividiendo ambos miembros por Z:

$$\hat{Z} = \frac{\partial Z}{\partial X}.\frac{1}{Z}\dot{X} + \frac{\partial Z}{\partial Y}.\frac{1}{Z}.\frac{dY}{dX}.\dot{X}$$

Multiplicando y dividiendo los sumandos, respectivamente, por X e Y:

$$\hat{Z} = e_{Z,X}.\hat{X} + e_{Z,Y}.\frac{1}{Y}.\frac{dY}{dX}.\dot{X}$$

Luego, si se multiplica y divide el segundo sumando por X:

$$\hat{Z} = e_{Z,X}.\hat{X} + e_{Z,Y}.\frac{dY}{dX}.\frac{X}{Y}.\hat{X}$$

Nótese que $\frac{dY}{dX}.\frac{X}{Y}$ es la elasticidad de Y respecto a X. Si se la denota $e_{Y,X}$, la expresión anterior puede escribirse como:

$$\hat{Z} = e_{Z,X}.\hat{X} + e_{Z,Y}.e_{Y,X}.\hat{X}$$

Obsérvese que la fórmula resultante es similar a la del subapartado 1), con la diferencia de que la tasa instantánea de crecimiento de Y se reemplaza por el término $e_{Y,X}.\hat{X}$. De esta forma, X ejerce influencia sobre Y vía $e_{Y,X}$.

Referencias bibliográficas

Chiang, A. C. & Wainwright, K. (2006). Capítulo 10: "Funciones exponenciales y logarítmcas", en *Métodos fundamentales de economía matemática*. McGraw-Hill, México.

De Gregorio, J. (2007). *Macroeconomía. Teoría y Políticas.* Disponible en internet en PDF, http://www.degregorio.cl/pdf/Macroeconomia.pdf [consultada el 22/11/16].

Dornbusch, R., Fischer, S. & Startz, R. (2004). Capítulo 3: "El crecimiento y la acumulación", en *Macroeconomía*. McGraw-Hill.

Solow, R. M. (1957). "Technical Change and the Aggregate Production Function". *The Review of Economics and Statistics*, agosto, v. 39, nº 3; http://faculty.georgetown.edu/mh5/class/econ489/Solow-Growth-Accounting.pdf [consultada el 22/11/16].

Apéndice

A.I) Crecimiento en tiempo discreto

A.I.1) Z como suma y/o resta de n variables

Supóngase que:

$$Z_i = \sum_{k=1}^{n} W_{ik}$$

$$Z_j = \sum_{k=1}^{n} W_{jk}$$

Donde:

W_{ik} y W_{jk} son los valores asumidos por la $k-ésima$ variable en los momentos t_i y t_j respectivamente.

Mediante un razonamiento análogo al expuesto en el apartado correspondiente se demuestra que:

$$G_Z^{ij} = \sum_{k=1}^{n} \theta_{iW_k} . G_{W_k}^{ij}$$

Donde:

$G_{W_k}^{ij}$ es la tasa de crecimiento de la $k-ésima$ variable entre los momentos t_i y t_j.

θ_{iW_k}es la participación que tiene la $k-ésima$ variable en Z, en el momento t_i.

Por otra parte, obsérvese que W_k puede hacer referencia a una variable que, en rigor, esté restando. Ergo, se justifica el uso de la fórmula para el caso en que haya sumas y/o restas de variables.

A.I.2) Z como producto y/o cociente de n variables

Supóngase que:

$$Z_i = \prod_{k=1}^{n} W_{ik}$$

$$Z_j = \prod_{k=1}^{n} W_{jk}$$

Luego:

$$G_Z^{ij} = \frac{\prod_{k=1}^{n} W_{jk} - \prod_{k=1}^{n} W_{ik}}{\prod_{k=1}^{n} W_{ik}}$$

$$G_Z^{ij} = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{W_{jk}}{W_{ik}}\right) - 1$$

Considerando que $\frac{W_{jk}}{W_{ik}} = G_{W_k}^{ij} + 1$, entonces:

$$G_Z^{ij} = \prod_{k=1}^{n}(G_{W_k}^{ij} + 1) - 1$$

Si se desarrolla la expresión anterior se obtendrán 2^{n-1} sumandos, por lo tanto, la desagregación de la tasa de crecimiento de Z sigue siendo aditiva. Por otra parte, nótese que W_k puede hacer referencia a una variable que, en rigor, esté dividiendo. Consecuentemente, queda justificado el uso de la fórmula para el caso en que haya productos y/o divisiones de variables.

A.II) Crecimiento en tiempo continuo

A.II.1) Z como suma y/o resta de n variables

Considérese el caso en que:

$$Z(t) = \sum_{k=1}^{n} W_k(t)$$

Donde $W_k(t)$ denota a la $k-ésima$ variable, la cual depende del tiempo. Mediante un procedimiento análogo al expuesto en el apartado correspondiente, se demuestra que:

$$\hat{Z} = \sum_{k=1}^{n} \theta_{W_k} . \widehat{W_k}$$

Donde:

$\widehat{W_k}$ es la tasa instantánea de crecimiento de la $k-ésima$ variable.

θ_{W_k} es la participación que tiene la $k-ésima$ variable en Z, en el instante inicial.

A.II.2) Z como producto y/o cociente de n variables

Supóngase que:

$$Z(t) = \prod_{k=1}^{n} W_k(t)$$

Razonando de forma similar al apartado correspondiente, se deduce que:

$$\hat{Z} = \sum_{k=1}^{n} \widehat{W_k}$$

A.II.3) Z como función de n variables, con forma funcional desconocida

Considérese el caso en que:

$$Z = Z(W_1, W_2, \dots, W_n)$$

Nótese que se ha suprimido, con el objeto de simplificar la notación, el argumento correspondiente al tiempo (no obstante, debe recordarse que todas las variables dependen de t). Luego, operando de forma análoga al apartado correspondiente, se demuestra que:

$$\hat{Z} = \sum_{k=1}^{n} e_{Z,k} \, . \, \widehat{W_k}$$

Donde $e_{Z,k}$ es la elasticidad de Z respecto a la $k-ésima$ variable. Por otra parte, obsérvese que $W_1, W_2, \dots, W_n$ son independientes entre sí. En el caso de que existan una o más variables dependientes entre sí, se opera de forma similar a la del subapartado 2), apartado c), sección II.